Solutions de l’exercice 3

1) L'algorithme d'Euclide pour plusieurs nombres

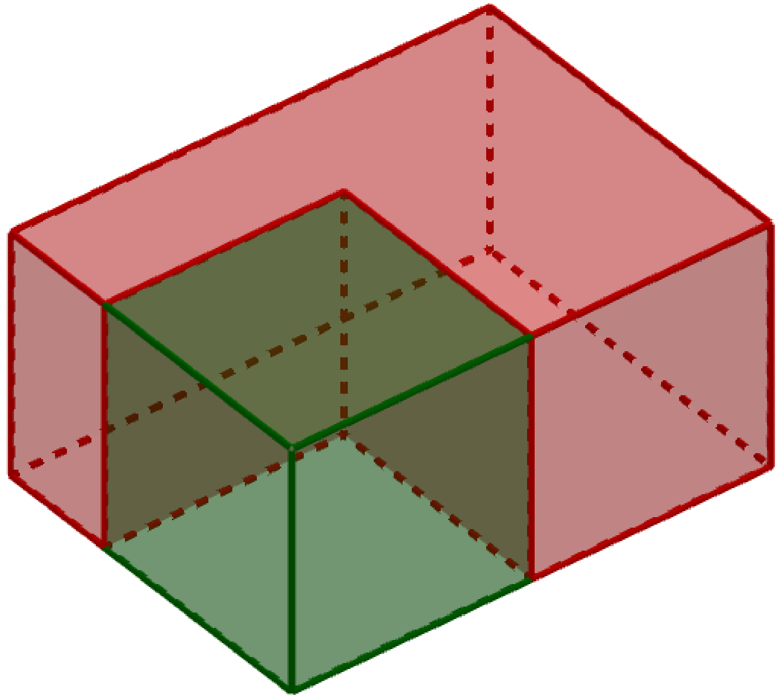
(a) On pourrait penser qu'il s'agit de remplir une boîte rectangulaire avec des cubes. Or, cela ne fonctionne pas forcément.

En effet, en retranchant un cube d'un prisme rectangulaire, il reste en général un prisme à base irrégulière – typiquement un espèce d'hexagone concave à angles droits.

Toutefois, la méthode « algorithmique » continue de fonctionner : si A < B < C, alors,

PGCD(A, B, C) = PGCD(A, B-A, C-A).

On répète jusqu'à ce que les trois nombres soient égaux, et on a gagné.



1) L’algorithme d’Euclide pour plusieurs nombres

(b) En plus haute dimension, on ne peut même pas faire de représentation graphique. Mais l’algorithme fonctionne encore : Si $A < B < C < \ldots < D$, alors

PGCD(A, B, C, …, D) = PGCD (A, B-A, C-A, …, D-A)

Et on recommence jusqu’à ce que tous les nombres soient égaux.

Alternativement,

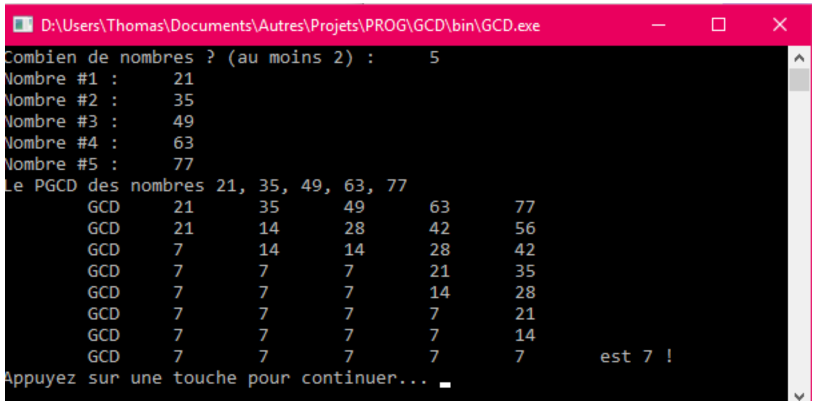
PGCD(A, B, C, …, D)

= PGCD (A, PGCD(B, C, …, D))

= PGCD(A, PGCD(B, PGCD (C, …, D))

…

On peut donc simplement utiliser l’algorithme pour trouver le PGCD de deux nombres, et l’appliquer à répétition



J’ai écrit un programme qui effectue l’algorithme et qui montre la trace des calculs. Il peut être téléchargé sur ma page Web.
http://www.dms.umontreal.ca/~davignon/

2) L’hôtel infernal

(a) Il suffit de dire à tous les clients déjà dans l’hôtel de déménager dans la chambre voisine. Autrement dit, le client de la chambre n déménage vers la chambre n+1. Alors, la chambre 1 est libre.

(b) Similairement, si on veut loger une infinité de nouveaux clients, il suffit de dire aux clients de déménager dans la chambre dont le numéro est le double de leur numéro de chambre actuel – le client de la chambre n ira dans la chambre numéro 2n. Alors, les chambres impaires seront toutes libres

2) L’hôtel infernal

(c) Il faut être plus créatif pour loger le contenu d’une infinité d’autobus infinis. Mais ça peut être fait !

Il suffit de déplacer tous les clients déjà à l’hôtel vers une chambre portant un nombre premier.

Si les nombres premiers sont ordonnés $p_1, p_2, p_3, \ldots$, alors le client n ira dans la chambre p_n.

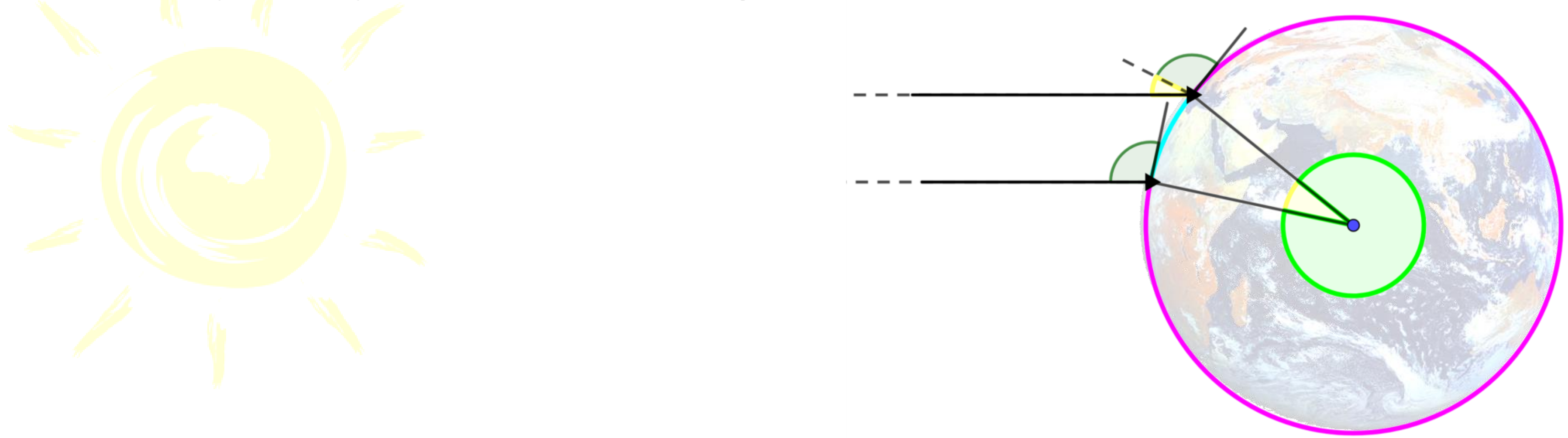
Ensuite, on place la $i$ème personne du $j$ème autobus dans la chambre

$$p_j^{i+1}$$

Il y a alors encore plein de chambres vides ! En effet, les seules chambres occupées sont les chambres correspondant à des puissances de nombres premiers. Par exemple, il n’y a personne dans la chambre 6, ou dans la chambre 21…

3) La circonférence de la Terre

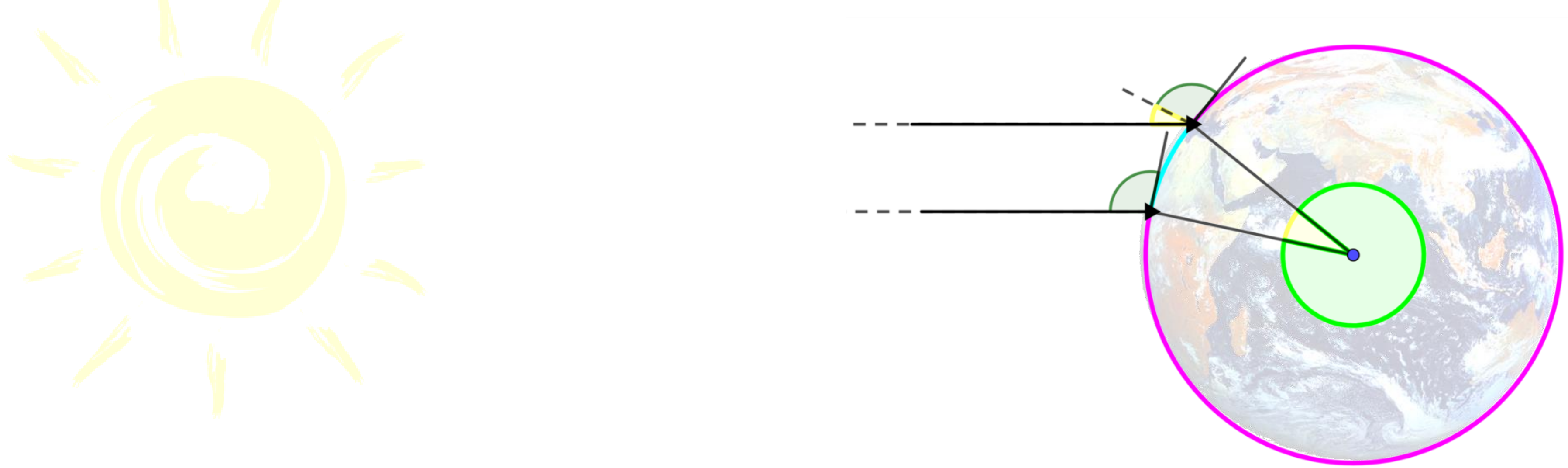
Il faut remarquer que sur cette figure :



Les angles verts sont égaux entre eux, et les angles jaunes sont égaux entre eux.

On mesure simultanément l’angle d’incidence des rayons du Soleil à deux endroits différents, l’un étant situé exactement au Nord de l’autre

3) La circonférence de la Terre



Les mesures que nous avons prises vont avoir pour différence un angle exactement égal à l’angle jaune, soit l’angle sous-tendu par l’arc entre les deux endroits où nous mesurons.

Si on sait quelle distance sépare nos deux points de mesure, on peut utiliser la proposition VI.33 pour montrer que l’arc est à l’angle jaune comme le reste de la circonférence de la terre est au reste d’un tour complet.