INTRODUCTION AUX TREIZE LIVRES DES ÉLÉMENTS

Séance 3 : Théorie des nombres

Par Thomas Davignon
davignon@dms.umontreal.ca

AU MENU CE SOIR

Deux concepts de nombre.

Livres VII, VIII, IX : Entiers

- Nombres entiers positifs, unité
- Arithmétique simple : $+$, $-$, $\times$, $\div$
- Divisibilité, algorithme d'Euclide
- Nombres premiers, résultats intéressants…

Livres V, VI, X : Réels

- Nombres réels positifs, notion de ratio raffinée.
- Similitude des figures, résultats géométriques plus complexes avec les ratios.

SUR LES NOTIONS DE NOMBRES

Entiers vs. Réels

Difficultés potentielles…*

LES NOMBRES (ENTIERS) (POSITIFS)

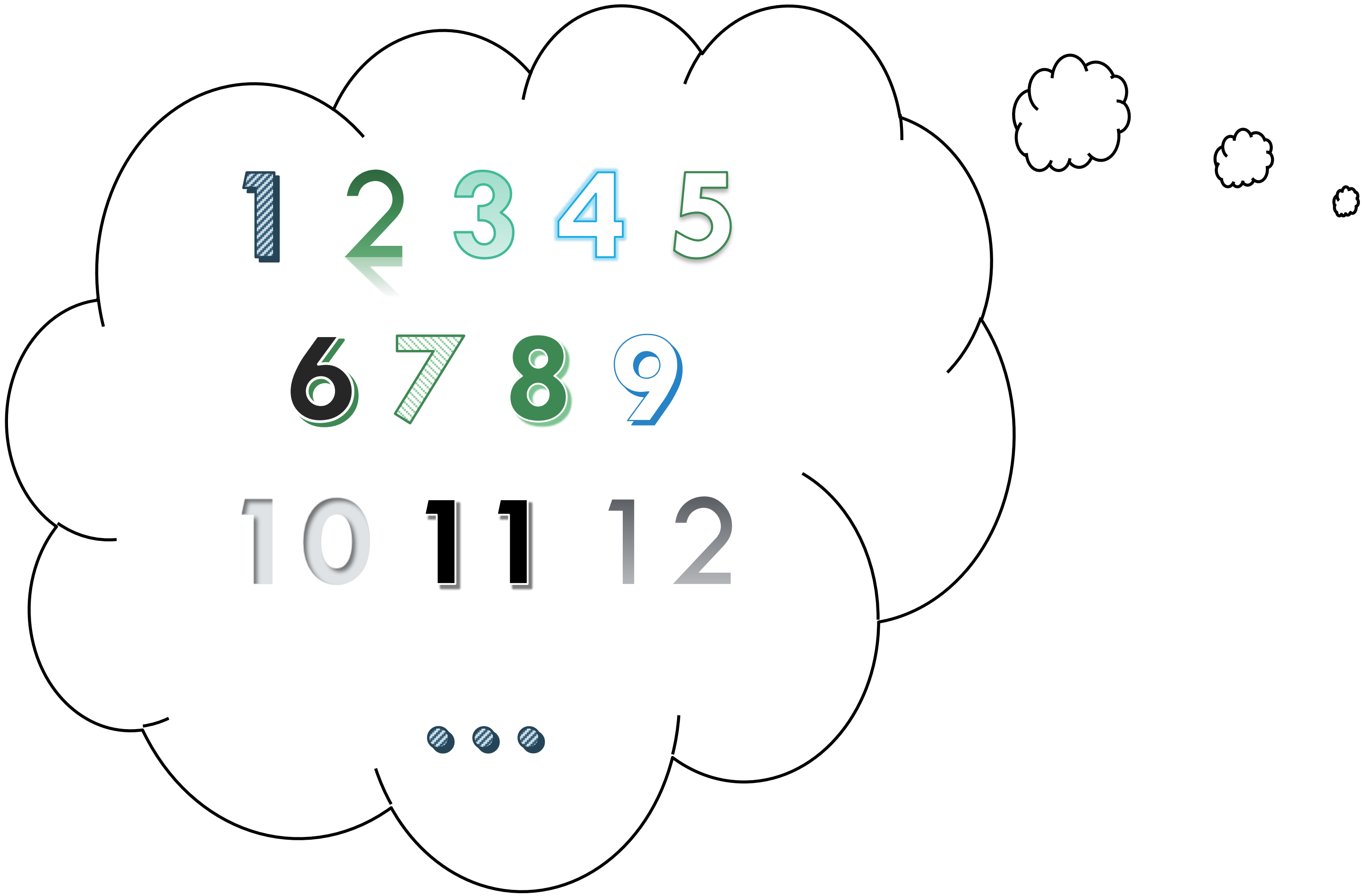


Fig. 1: Le capitaine Obvious connaît les nombres.

DES PROBLÈMES ?

… 2476 2477 …

Une infinité de nombres?

Un ordre particulier pour les nombres?

?*

… 1

Un plus petit nombre?

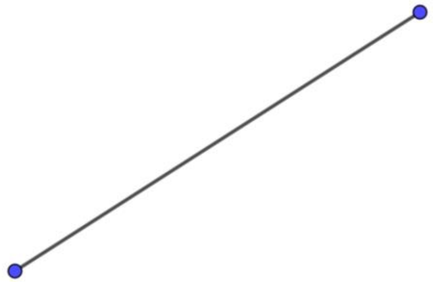
DES PROBLÈMES ?

« C't'ivident ! »

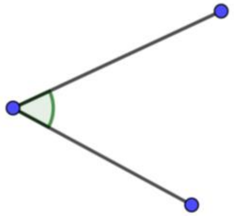
-- Euclide, c.a. 300 av. J.-C.

Pas d'axiomes, pas de postulats, pas de demandes…

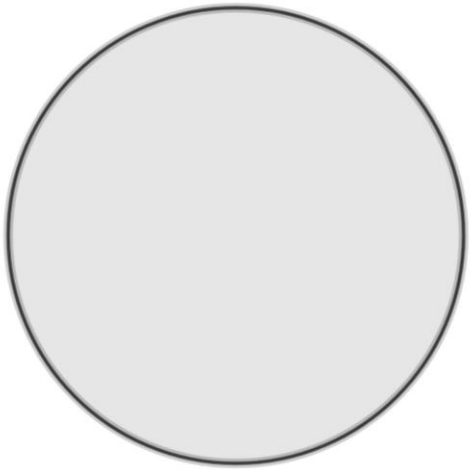
LES GRANDEURS



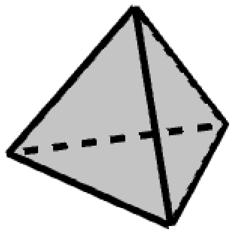
Longueur d’un segment



Mesure d’un angle



Aire d’une figure



Volume d’un solide

Nombres réels ?

LES GRANDEURS

NON !

On donne toujours une grandeur comme un certain **ratio** par rapport à une grandeur-étalon

qu'on appelle **unité**

et c'est pas pour rien.

Les ratios sont les nombres réels. Les grandeurs ne sont pas des nombres (au sens moderne) !

Pensez-y : L'instruction « Coupe-moi un morceau de bois de longueur 2 » n'a pas de sens à moins qu'on sous entende « mètres » ou « pieds »…

LIVRES VII ET IX

ET AUSSI LE LIVRE VIII, BRIÈVEMENT

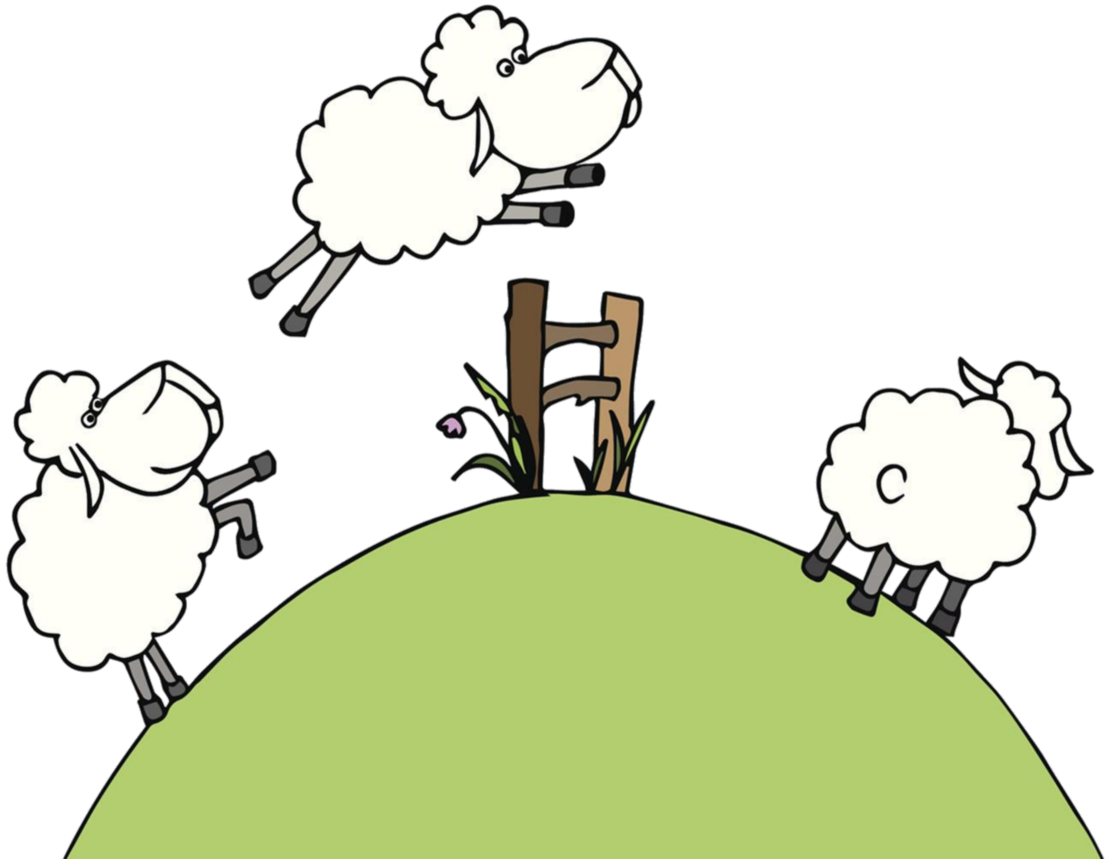
Théorie des nombres (entiers) (positifs)

Nombres premiers

LIVRE VII – DÉFINITIONS

VII.1 Est **unité** ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

VII.2 Et un **nombre** est la multitude composée d'unités.

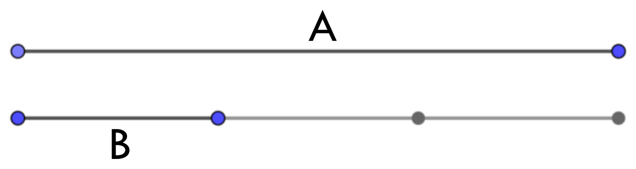


LIVRE VII – DÉFINITIONS

VII.3 Un nombre est une **partie** d’un nombre, le plus petit du plus grand, quand il mesure* le plus grand.

VII.4 Et **des parties**, quand il ne le mesure pas.

VII.5 Et un **multiple**, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.



A est un multiple de B; B est une partie de A.

Attention ! Ici, comme dans tout Euclide, les nombres sont représentés par des segments, même si la longueur d’un segment n’est pas considérée comme un « nombre » au sens moderne.

*mesurer : diviser exactement

LIVRE IV – DÉFINITIONS

VII.12 Un nombre **premier** est celui qui est mesuré par une seule unité.

Voici par exemple 23, nombre premier de choix

LIVRE VII – DÉFINITIONS

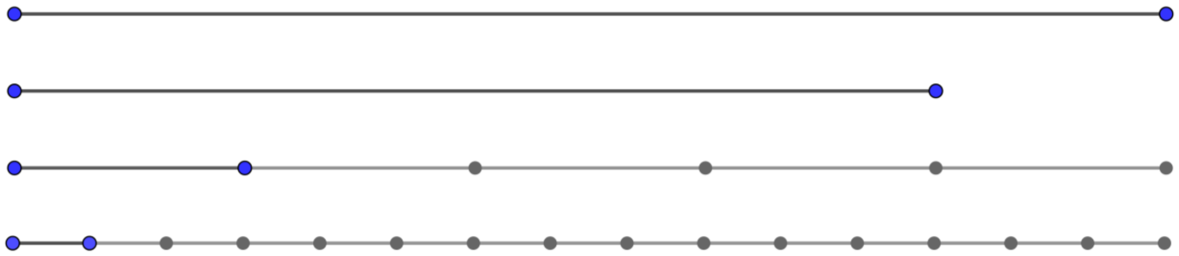
VII.13 Des nombres **premiers entre eux** sont ceux qui sont mesurés par une seule unité comme commune mesure.

14 et 15 sont co-premiers, ou « premiers entre eux ».

LIVRE VII – DÉFINITIONS

VII.14 Un nombre **composé** est celui qui est mesuré par un certain nombre

VII.15 Et des nombres **composés entre eux** sont ceux qui sont mesurés par un certain nombre comme commune mesure.



Ici, on voit que 12 et 15 sont composés entre eux (c'est-à-dire ont un facteur commun), soit 3.

LIVRE VII – DÉFINITIONS

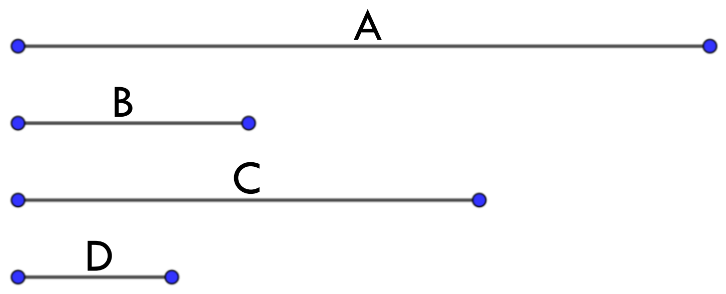
VII.16 Un nombre est dit **multiplier** un nombre quand, autant il y a d'unités en lui, autant de fois le multiplié est ajouté à lui-même, et qu'il est produit un certain nombre.

VII.17 Et quand deux nombres s'étant multipliés l'un l'autre, produisent un certain nombre, le produit est appelé **(nombre) plan**, et les nombres qui se sont multipliés l'un l'autre, ses **côtés**.

$$7 \times 4 = 28$$

LIVRE VII – DÉFINITION

VII.21 Des nombres sont en **proportion** quand le premier du deuxième, et le troisième du quatrième, sont équimultiples, ou la même partie, ou les mêmes parties.

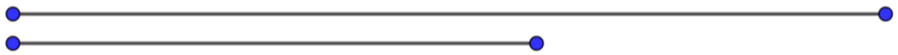


A, B, C et D sont en proportion car A est le triple de B et C est le triple de D. On dit que « A est à B comme C est à D ».

L’ALGORITHME D’EUCLIDE (PROPS VII.1-3)

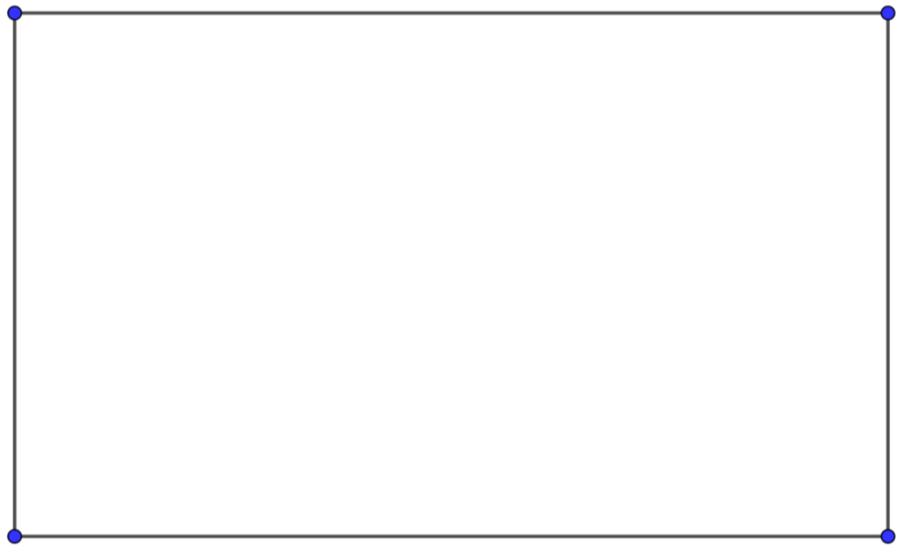
Question : Si deux nombres A et B sont donnés, est-il possible de trouver leur plus grand commun diviseur ?

Peut-on déterminer si ils sont relativement premiers ?



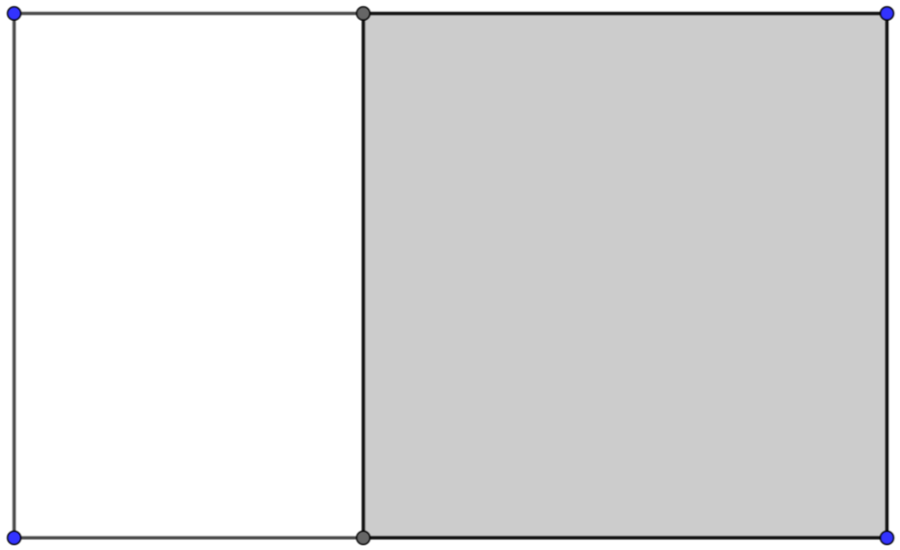
L'ALGORITHME D'EUCLIDE

1) On construit le nombre plan qui a les côtés donnés.



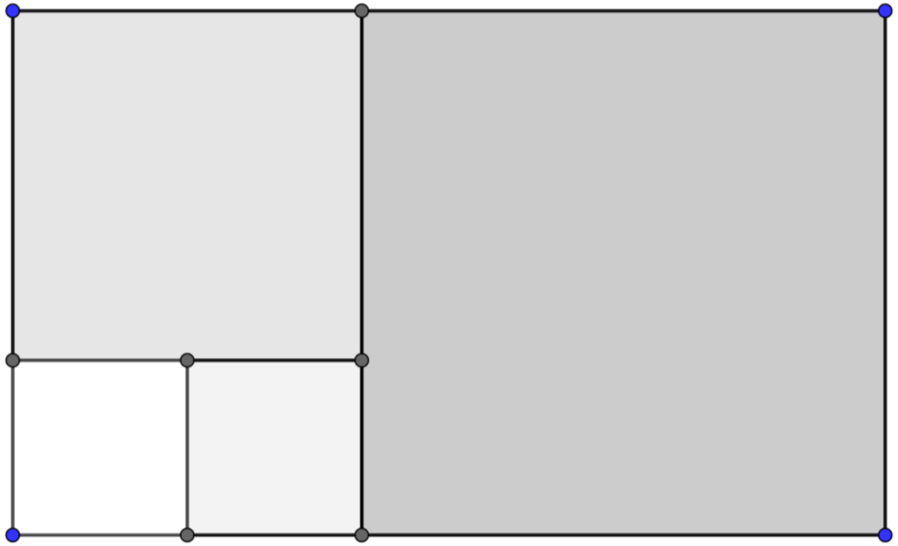
L'ALGORITHME D'EUCLIDE

2) On retranche au rectangle le plus grand carré possible (un carré dont le côté est égal au plus petit côté du rectangle).



L'ALGORITHME D'EUCLIDE

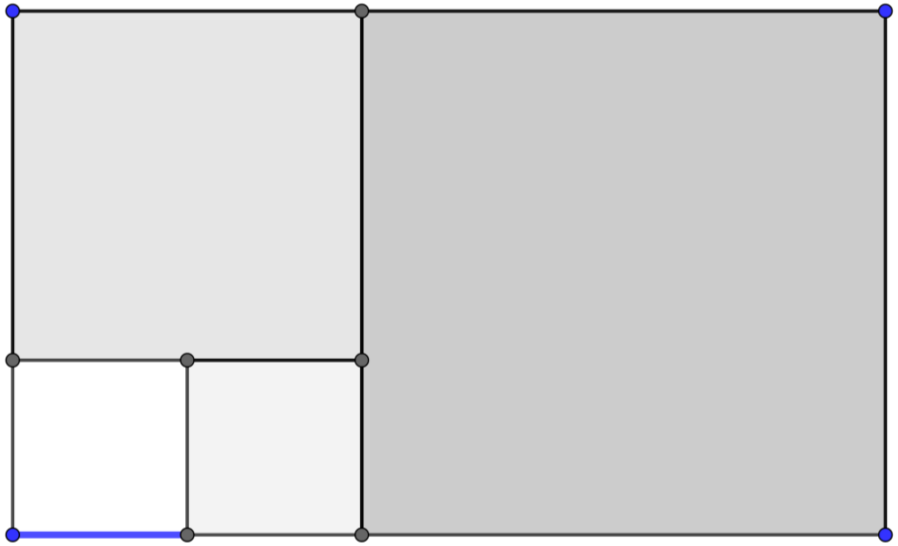
3) Si le rectangle restant est un carré, on arrête. Autrement, on répète l'étape 2 avec le rectangle restant.



L’ALGORITHME D’EUCLIDE

Le côté du carré restant à la fin de la procédure est le plus grand commun diviseur des deux côtés initiaux.

Si le carré qui reste est un carré de côté unité, alors on sait que nos deux nombres initiaux étaient premiers entre eux.



L'ALGORITHME D'EUCLIDE
IDÉE DE PREUVE

Si A < B et C est un diviseur de A et B, alors C est aussi un diviseur de B-A.

Chercher le plus grand commun diviseur de A et B revient exactement au même que de chercher le plus grand commun diviseur entre A et B-A.

Autrement dit, PGCD (A, B) = PGCD (A, B-A).

Forcément, si ces deux nombres sont égaux, on a gagné puisque leur plus grand commun diviseur est évidemment eux-mêmes.

L'algorithme est récursif (c'est-à-dire qu'il s'emploie lui-même).

Il a aussi été démontré que c'est l'algorithme le plus rapide ! (Mais pas par Euclide).

En fait, Euclide décrit l'algorithme sans les rectangles, juste avec les différences. Mais la version avec les rectangles est plus amusante…

L'ALGORITHME D'EUCLIDE
EXEMPLE

Trouver le PGCD de 273 et 156.

C'est aussi le PGCD de 156 et (273 - 156) = 117.

Donc c'est aussi le PGCD de 117 et (156 – 117) = 39.

Donc c'est aussi le PGCD de 39 et (117 – 39) = 78.

Donc c'est aussi le PGCD de 39 et (78 – 39) = 39.

Donc c'est 39.

L'ALGORITHME D'EUCLIDE
EXEMPLE

Trouver le PGCD de 209 et 119.

C'est aussi le PGCD de 119 et (209 - 119) = 90.

Donc c'est aussi le PGCD de 90 et (119 – 90) = 29.

Donc c'est aussi le PGCD de 29 et (90 – 29) = 61.

Donc c'est aussi le PGCD de 29 et (61 – 29) = 32.

Donc c'est aussi le PGCD de 29 et (32 – 29) = 3.

Donc c'est aussi le PGCD de 3 et (29 – 3) = 26.

…

Donc c'est aussi le PGCD de 3 et (6-3) = 2.

Donc c'est 1. 209 et 119 sont copremiers.

TROUVER LE PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE (PROP VII.34)

Question : Peut-on trouver le plus petit commun multiple de deux nombres donnés ?

Réponse : Oui !

$$PPCM(a,b) = \frac{a \times b}{PGCD(a,b)}$$

Preuve rapide : Si le PGCD de a et b est c, alors il existe m et n tel que $a = c \times m$ et $b = c \times n$, et m et n sont relativement premiers (sinon, c n'est pas le PGCD). Alors, $a \times b = c \times c \times m \times n$, et on peut retirer l'un des facteurs de c.

On obtient $\frac{a \times b}{c} = c \times m \times n = a \times n = b \times m$, qui est un multiple de a et de b. On ne peut pas faire plus petit; il faudrait diviser m et on n'aurait plus un multiple de a. Ou il faudrait diviser n et on n'aurait plus un multiple de b. Ou il faudrait diviser c et on n'aurait plus un multiple de a ni de b.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE

Tout nombre peut être décomposé de façon unique en un produit de facteurs premiers dont il est le plus petit commun multiple.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE **ÉLÉMENTS DE LA PREUVE**

La preuve se fait en deux parties.

1) On montre que la décomposition existe.
Cette partie emploie une construction récursive.

2) On montre qu'elle est unique.

Chacune de ces parties repose sur des petites propositions des livres VII et IX.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE **ÉLÉMENTS DE PREUVE**

Existence de la décomposition

1) Soit a notre nombre. Si a est premier, on a déjà notre décomposition. Sinon…

Proposition VII.31 **:** Tout nombre composé est divisible par au moins un nombre premier.

2) Puisque a n'est pas premier, a est composé.
Par conséquent, a est divisible par au moins un nombre premier p, et $a = p \times b$ pour un certain b.

On répète les étapes (1) et (2) avec le nombre b, et ainsi de suite…

Chaque nouveau nombre est plus petit que le précédent, puisqu'il le divise. Donc, éventuellement, b sera premier, car la suite de nombres ne peut pas être infinie.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE **ÉLÉMENTS DE PREUVE**

Unicité de la décomposition

Cet argument est plus ardu.

Il repose sur le fait que…

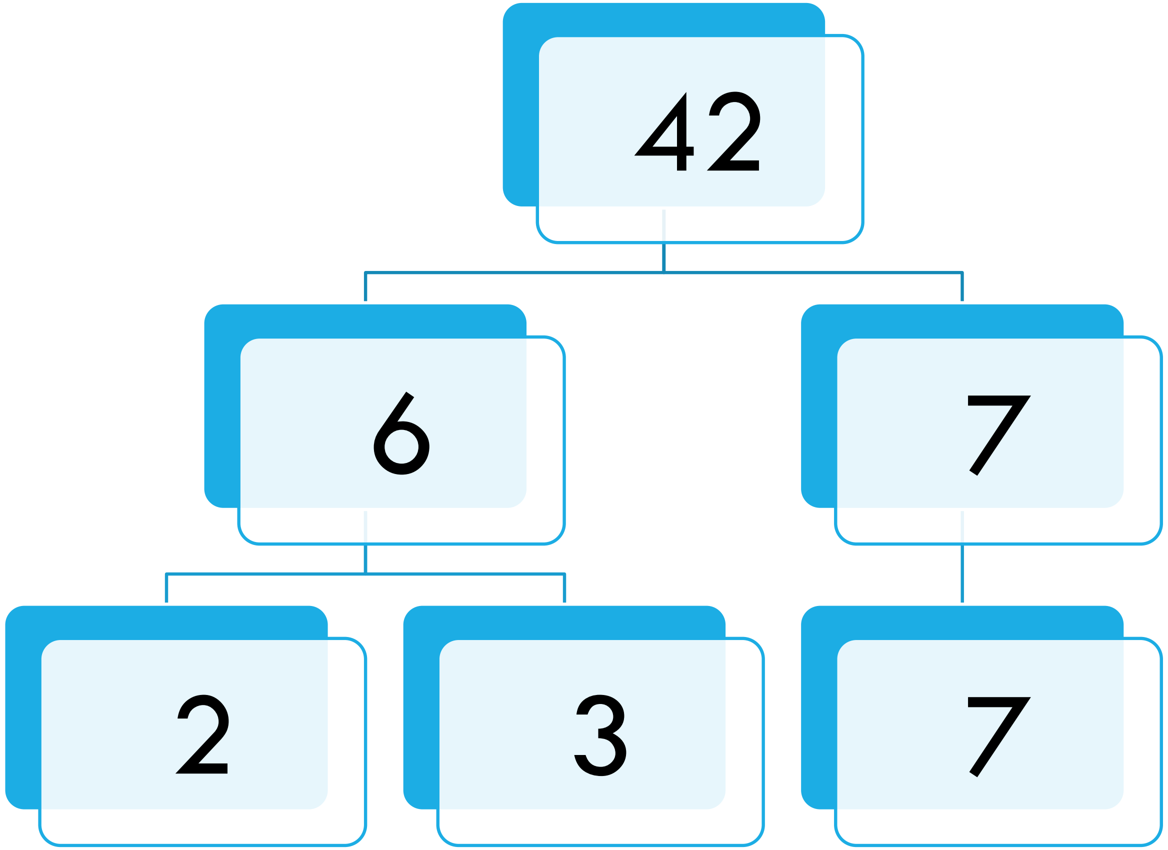
IX.14 : Le PPCM de nombres premiers n'est divisible par aucun autre nombre premier.

On a réussi à écrire $a = p \times q \times \cdots \times r$, c'est à dire un produit de nombres premiers. Mais alors, clairement, $a = PPCM(p, q, \dots, r)$, puisque, par la proposition VII.34, on sait que le PPCM est le produit divisé par le PGCD, et que le PGCD est 1 (vu que $p, q, \dots, r$ sont tous premiers).

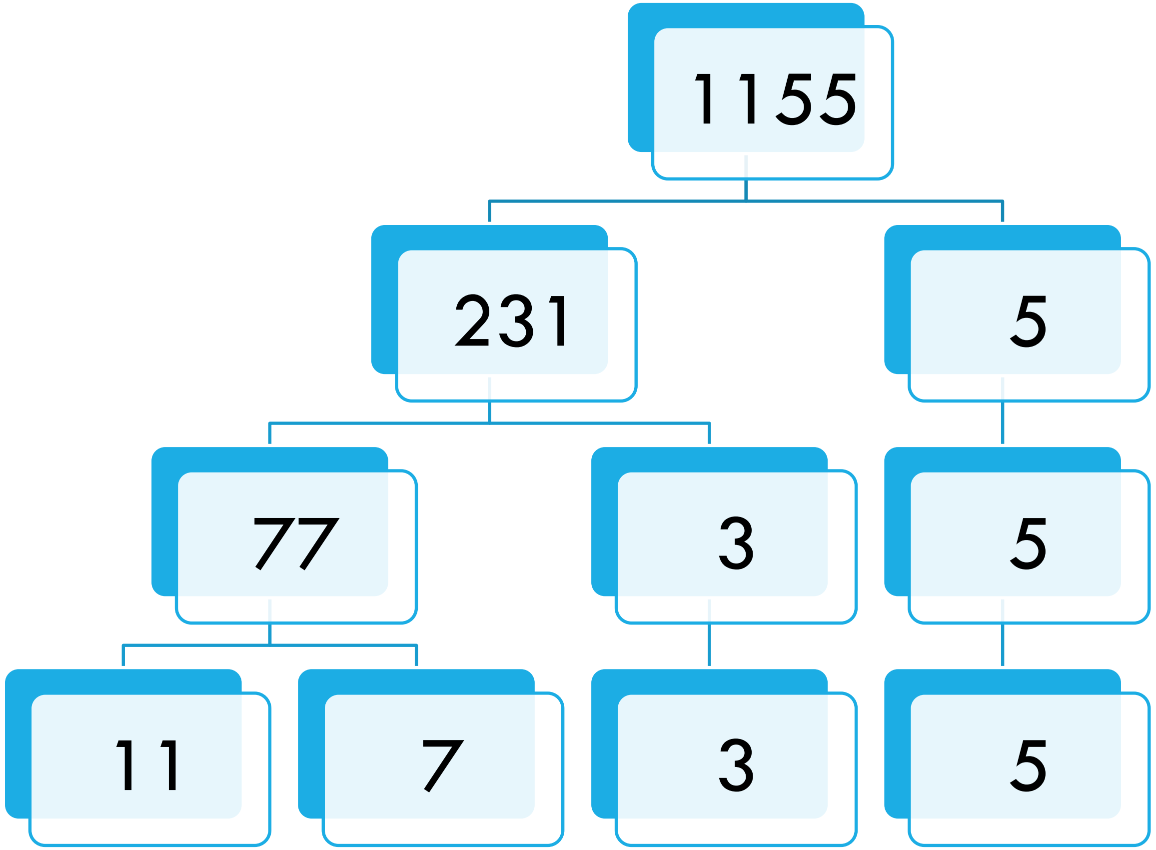
Or, par IX.14, le PPCM de nombres premiers n'est divisible par aucun autre premier. Il ne peut donc pas exister d'autre décomposition que celle qu'on a trouvé pour a.

CQFD.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE
EXEMPLES



THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE
EXEMPLES



INFINITÉ DES NOMBRES PREMIERS (PROP. IX.20)

Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.

INFINITÉ DES NOMBRES PREMIERS
PREUVE

On fait cette preuve par contradiction :

1) On va commencer par supposer le contraire de ce qu'on veut prouver.

2) On va ensuite montrer que cette supposition conduit à une contradiction.

On devra conclure que notre énoncé est non-faux, soit qu'il est vrai.

INFINITÉ DES NOMBRES PREMIERS
PREUVE

Supposons que $A, B, \dots, C$ soient ensemble tous les nombres premiers et qu'il n'y en ait aucun autre.

On considère alors $D = A \times B \times \cdots \times C + 1$. Il s'agit du produit de tous les nombres premiers pris ensemble, plus une unité.

Si D est un nombre premier, on a gagné, puisque D n'est pas parmi $A, B, \dots, C$, ce qui est une contradiction.

Si D n'est pas un nombre premier, il existe un nombre premier E qui divise D. Il doit être parmi $A, B, \dots, C$, puisque ce sont les seuls.

Mais alors E divise $A \times B \times \cdots \times C$ et E divise D. On doit donc avoir aussi que E divise l'unité, ce qui est absurde par définition de l'unité, puisque E est un nombre.

Donc $A, B, \dots, C$ ne sont pas les seuls nombres premiers, ce qu'il fallait démontrer.

LIVRE VIII – PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES

Le livre VIII s'attarde beaucoup aux progressions géométriques, où le ratio entre deux nombres consécutifs est constant :

Exemple :

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, …

En particulier, on remarque que dans une progression géométrique, si le premier nombre est carré, le troisième est aussi carré; si le premier est cube, le quatrième est aussi cube.

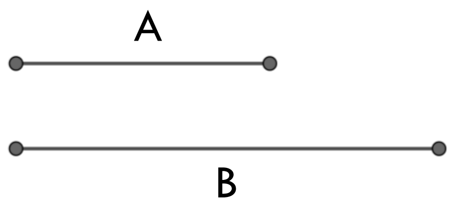
Exemple :

4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 sont tous des carrés, puisque 4 est carré
8, 64, 512, 4096, 32768 sont tous des cubes, puisque 8 est cube.

LES FRACTIONS : DES RATIOS D'ENTIERS

A est la ***n*-ième partie** de B si $n \times A = B$.

Lorsque A est plusieurs parties de B (déf. VII.3), on peut indiquer de combien de parties il s'agit. Exemple : A est trois cinquièmes parties de B.



La notion de **fraction** émerge ainsi naturellement comme la définition d'un ratio entre deux nombres. On comprend alors la définition de **proportion** comme l'égalité entre deux fractions.

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES ENTIERS ET DES FRACTIONS

$$a + b = b + a$$
Commutativité de l'addition

$$a(m - n) = am - an$$
Distributivité du produit sur la soustraction

$$a(m + n) = am + an$$
Distributivité du produit sur l'addition

$$m(na) = (mn)a$$
Associativité du produit

$$ab = ba$$
Commutativité du produit

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$
Addition/soustraction de quotients ou de fractions

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
Produit de quotients et de fractions

$$\left(\frac{p}{q}\right) a \pm \left(\frac{p}{q}\right) b = \left(\frac{p}{q}\right) (a \pm b)$$
Distributivité du produit de fractions sur l'addition/soustraction

etc.

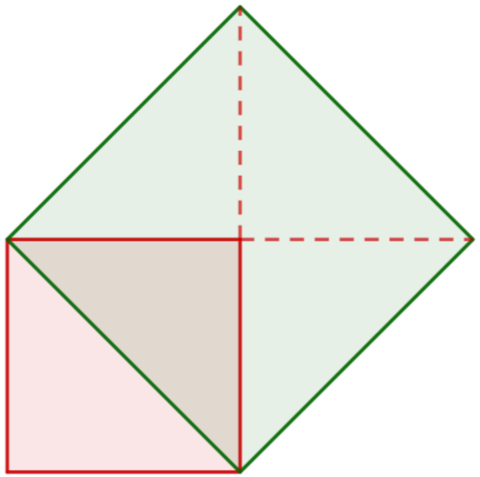
Je compte sur vous, vous savez compter.

LIVRE V

Théorie des ratios
Relations entre grandeurs
Généralisation des notions vues précédemment.

POURQUOI ON A BESOIN DE PLUS ?

Quel ratio entre le côté du carré vert et celui du carré rouge ?
Peut-on l’exprimer par un ratio d’entiers ?



Ben non !

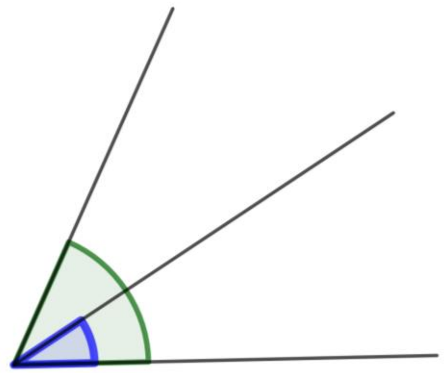
On doit avoir une définition du ratio plus générale, qui permette de comprendre le rapport entre, par exemple, le côté d’un carré et sa diagonale. Ou entre le diamètre d’un cercle et sa circonférence…

LIVRE V – DÉFINITIONS

V.1 Une grandeur est une **partie** d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande.

V.2 Et **multiple**, la plus grande de la plus petite, quand elle est mesurée par la plus petite.

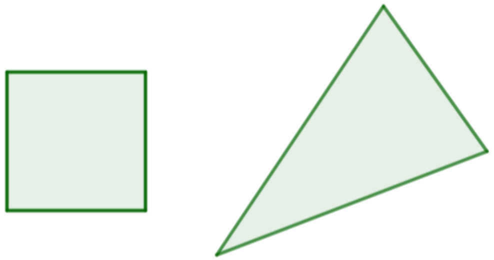
V.3 Un **rapport** est la relation, telle ou telle, selon la taille, qu'il y a entre deux grandeurs du même genre*.



Ici l'angle bleu mesure l'angle vert.

LIVRE V – DÉFINITIONS

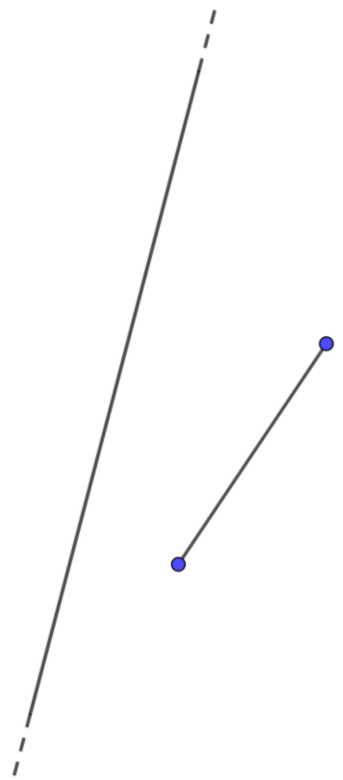
V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.



On peut couvrir le triangle avec plusieurs copies du carré. On peut couvrir le carré avec plusieurs copies du rectangle. Les aires du carré et du triangle ont un rapport entre elles.

LIVRE V – DÉFINITIONS

V.4 Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.



Même multiplié, le segment ne dépassera jamais la droite infinie. Les deux grandeurs n'ont pas de rapport.

LIVRE V – DÉFINITIONS

V.5 Des grandeurs sont dites être dans **le même rapport**, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième

quand des équimultiples de la première et la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune, et pris de manière correspondante.

$$A : B = C : D$$

Si et seulement si pour tous m, n choisis

$$mA > nB, mC > nD$$

OU

$$mA = nB, mC = nD$$

OU

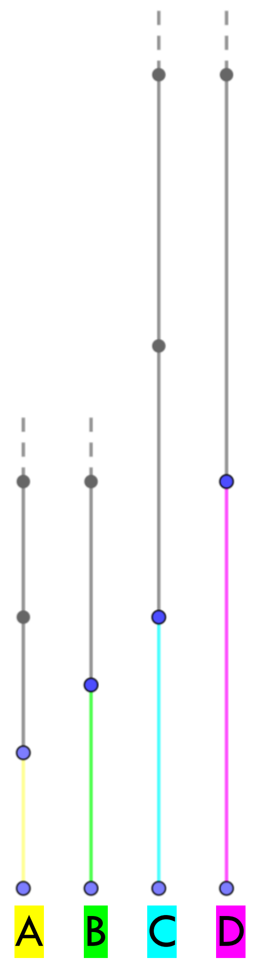
$$mA < nB, mC < nD$$

Remarquez que lorsque les grandeurs sont des nombres, cette définition revient exactement à celle qu'on a vue plus tôt.

LIVRE V – DÉFINITIONS

V.5 Des grandeurs sont dites être **dans le même rapport**, une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième

quand des équimultiples de la première et la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacune à chacune, et pris de manière correspondante.



LIVRE V – DÉFINITIONS

V.7 Et quand parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième et que d'autre part le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la quatrième, alors la première grandeur est dite avoir **un plus grand rapport** relativement à la deuxième que celui de la troisième à la quatrième.

$$A : B > C : D$$

Si et seulement si pour tous m, n tels que

$$mA > nB,$$

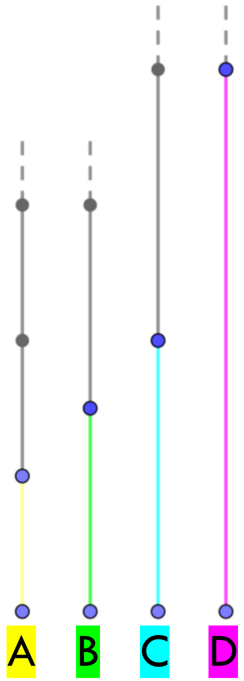
on a

$$mC \leq nD$$

Cette définition introduit la notion de la relation d'ordre entre les rapports. Elle est fondamentale car elle permettra d'ordonner les nombres réels !

LIVRE V – DÉFINITIONS

V.7 Et quand parmi les équimultiples, d'une part le multiple de la première dépasse le multiple de la deuxième et que d'autre part le multiple de la troisième ne dépasse pas le multiple de la quatrième, alors la première grandeur est dite avoir **un plus grand rapport** relativement à la deuxième que celui de la troisième à la quatrième.



Cette définition introduit la notion de la relation d'ordre entre les rapports. Elle est fondamentale car elle permettra d'ordonner les nombres réels !

Ici, $A:B = 2/3 > 1/2 = C:D$

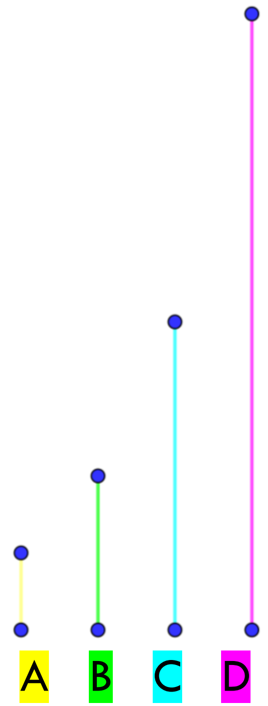
LIVRE V – DÉFINITIONS

Vocabulaire des proportions :

Si A:B = B:C, alors A:C est le **rapport doublé** de A:B.
Si A:B = B:C = C:D, alors A:D est le **rapport triplé** de A:B.

Dans une proportion A:B = C:D, les paires A, C et B, D sont appelées paires **homologues.**

Les rapports A:C et B:D sont appelés **alternes.**



Ici, A:B = B:C = C:D.
Le rapport A:C est le doublé de A:B, et A:D est le triplé

SUR LES RATIOS : EXPLICATIONS SUPPLÉMENTAIRES

La définition la plus importante (V.5) concerne **l'égalité entre deux ratios.**

Dans le livre VII, on définit l'égalité entre ratios de nombres (entiers positifs), en termes de « parties d'entiers ».

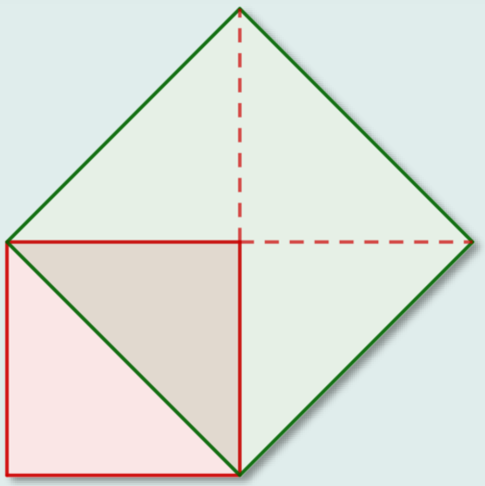
Pour des grandeurs générales, cette définition n'est pas suffisante – il existe des ratios qu'on ne peut exprimer ainsi.

L'astuce brillante dans la définition V.5 consiste à considérer **des suites de multiples entiers de deux grandeurs**, et à regarder comment ces suites « s'intercalent ».

On définit alors que deux paires de grandeurs sont dans le même ratio si les paires de suites correspondantes s'intercalent de la même façon.

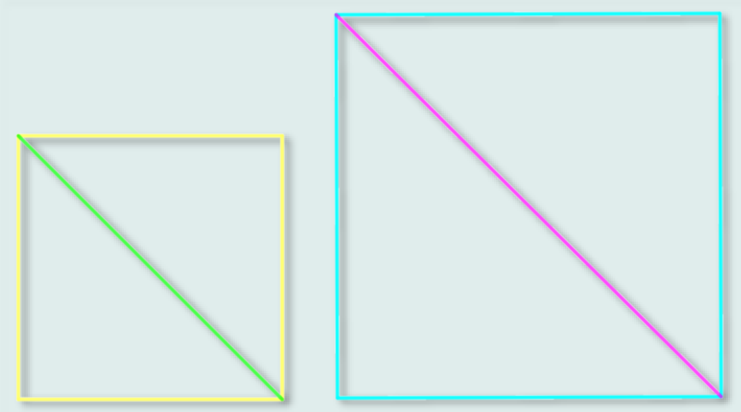
SUR LES RATIOS : EXEMPLE

La diagonale d’un carré est proportionnelle à son côté.



SUR LES RATIOS : EXEMPLE

Autrement dit, étant donnés deux carrés, le côté de l'un est à la diagonale de l'un comme le côté de l'autre est à la diagonale de l'autre.



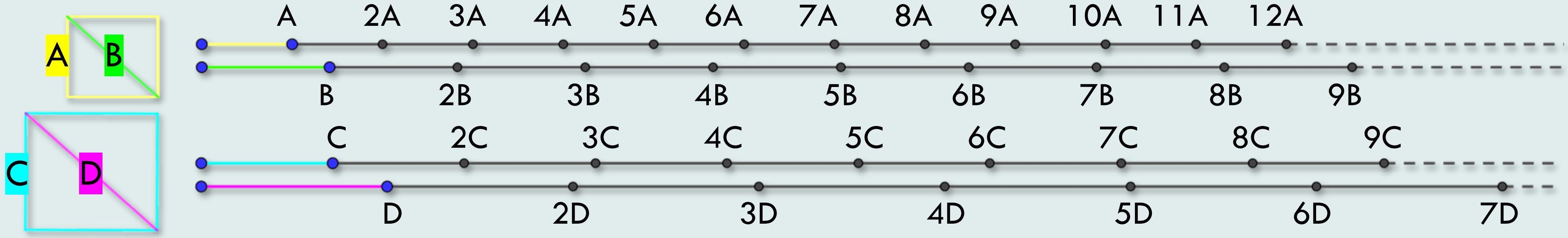
SUR LES RATIOS : EXEMPLE

Pour le prouver, il suffit de constater que si on intercale les suites de multiples entiers d'un côté de carré (A ou C) et de sa diagonale (B ou D), alors

les suites s'intercalent toujours de sorte que

$$A < B < 2A < 2B < 3A < 4A < 3B < 5A < 4B < 6A < 7A < 5B < 8A < 6B < \cdots$$

Les alternances sont les mêmes pour C et D, et ce jusqu'à l'infini.



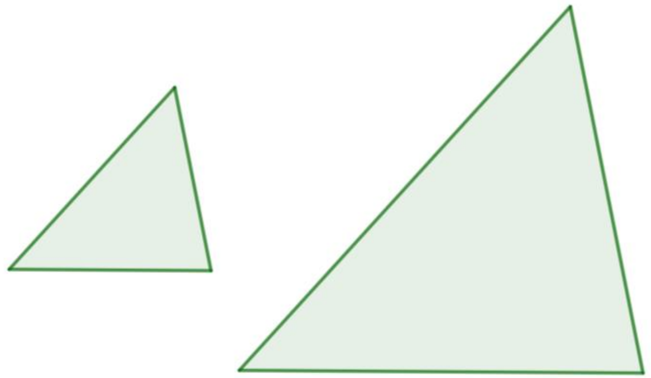
LIVRE V – PROPOSITIONS

Le livre V développe les propriétés des rapports; essentiellement, il s'agit tout simplement de propriétés de base des nombres réels que l'on connait.

Ce n'est pas particulièrement fascinant, mais c'est important pour la suite…

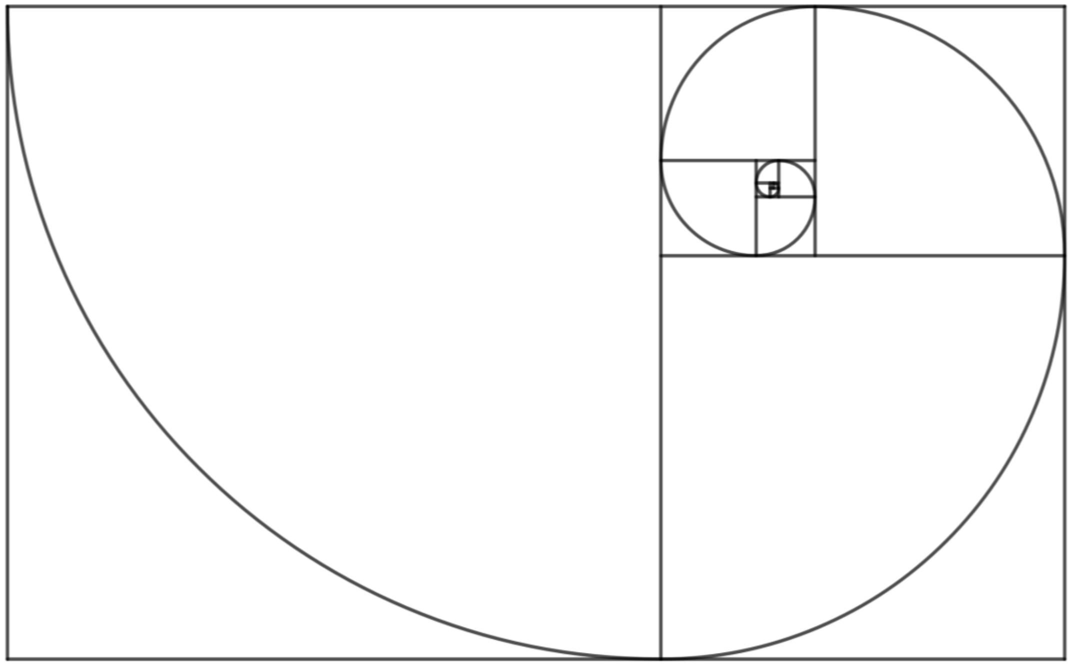
LIVRE IV – DÉFINITIONS

VI.1 Des figures rectilignes **semblables** sont celles qui ont les angles égaux un par un et dont les côtés autour des angles égaux sont en proportion.



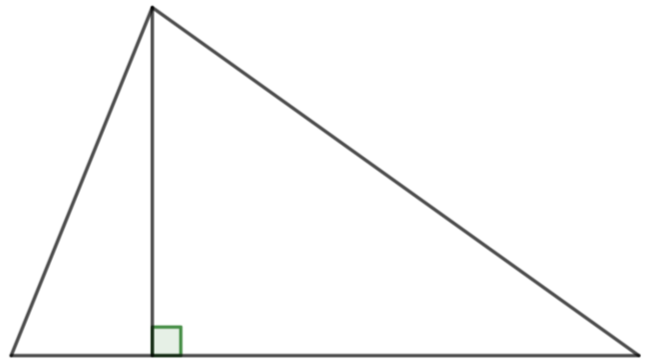
LIVRE VI – DÉFINITIONS

VI.2 Une droite est dite être coupée en extrême et moyenne raison quand, comme elle est toute entière au plus grand segment, le plus grand est au plus petit.



LIVRE VI – DÉFINITIONS

VI.2 Une **hauteur**, dans une figure, est la perpendiculaire menée à partir d'un sommet sur une base.



LIVRE VI – PROPOSITIONS

Avec notre nouvelle théorie des proportions définie dans le livre V, on peut maintenant s'attaquer à des résultats géométriques complexes.

Par exemple, on verra des critères pour des triangles semblables

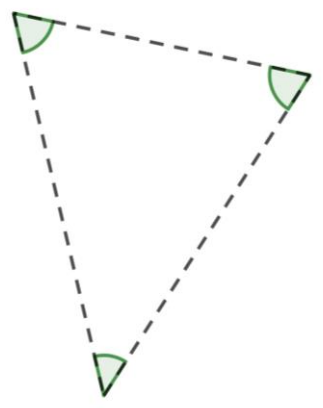
SIMILITUDE DES TRIANGLES

Deux triangles sont similaires si

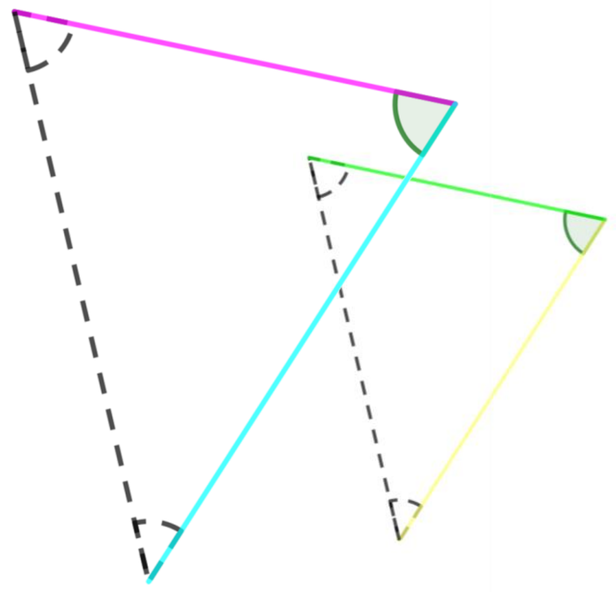
(a) Ils ont les trois angles égaux (ou seulement deux – le troisième sera fixé par les deux premiers, Prop. I.32)

(b) Ils ont un angle égal, et les côtés de l'angle proportionnels. (Prop. VI.6)

(c) Ils ont tous les côtés proportionnels.



(a)

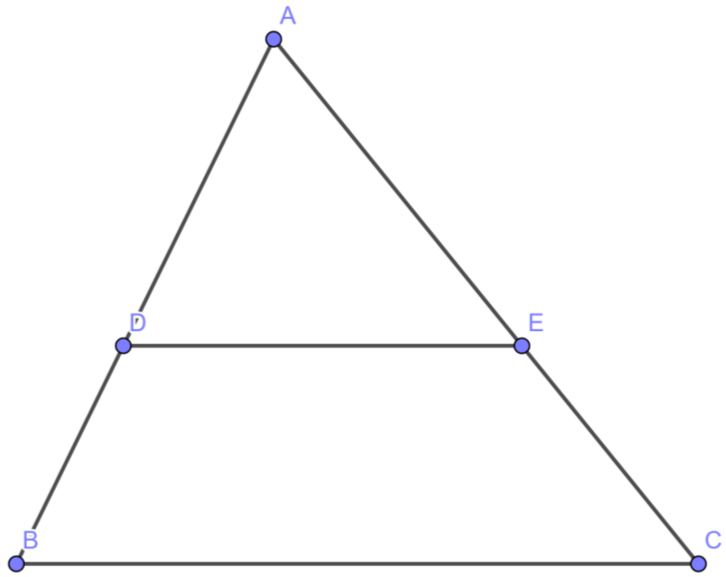


(b), (c)

THÉORÈME DE THALÈS (ENCORE LUI)

Proposition VI.2

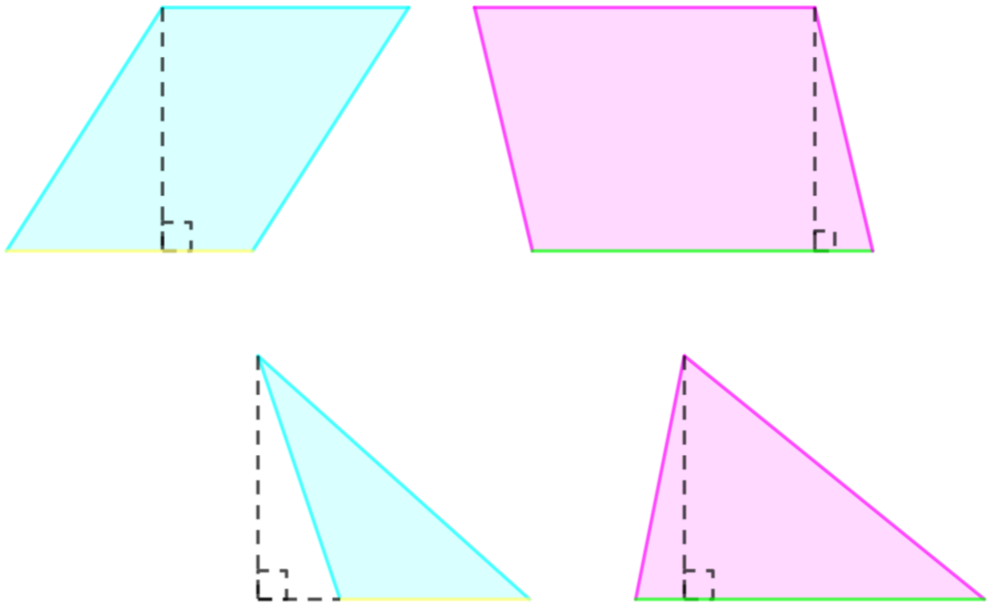
Si une droite coupe un triangle parallèlement à la base, le plus petit triangle est semblable au plus grand.



PROPORTIONNALITÉ D’AIRES

Proposition VI.1

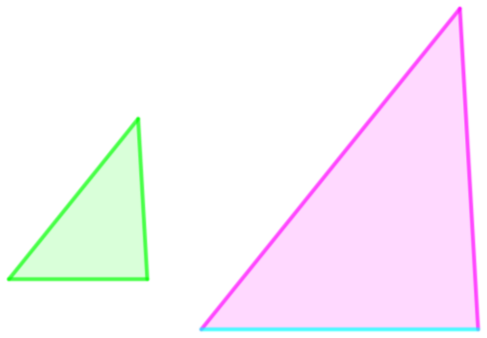
Les aires de triangles ou de parallélogrammes ayant la même hauteur sont proportionnelles à leurs bases.



PROPORTIONNALITÉ D'AIRES

Proposition VI.19

Les aires de triangles semblables sont entre elles comme le rapport doublé entre les côtés homologues des triangles.



QUESTIONS ? DISCUSSION ?

Extensions algébriques

Fractales

Autres questions?

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

Au cours j'ai discuté un peu de la façon dont on définit les nombres négatifs, puis je me suis un peu emporté. Les diapos qui suivent sont un résumé de cette discussion.

Nombres négatifs

?

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

Question : Existe-t-il des solutions à l'équation

$$A + x = B$$

si A et B sont des nombres entiers positifs ?

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

Réponse : si $A < B$, oui. Si non ?

On va dire qu'il y en a. On trouve déjà une solution à $A + X = A$ – on appelle ça « zéro »; on note ça « 0 ».

Et puis on regarde les autres solutions. Supposons que $A < B$. Alors, on a que la solution X à $A + X = B$ est un nombre entier positif (on connaît ça).

On considère maintenant la solution de Y à l'équation $B + Y = A$.

On additionne les équations. On obtient $(A + B) + (X + Y) = (A + B)$.

Résultat, on doit avoir que $(X + Y) = 0$. On note $Y = -X$

On déduit d'autres propriétés intéressantes de ces nouveaux nombres en observant comment ils se comportent en tant que solutions à ces équations. L'objectif est de préserver la cohérence.

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

On peut obtenir les nombres **rationnels** en cherchant les solutions à l'équation

$A \times X = B$

Et si on permet que B soit négatif, on aura aussi des nombres rationnels négatifs !

On refait la même étude pour comprendre le comportement de ces nombres – ou alors on consulte le livre VII, où ils sont abordés (par une autre construction).

De nos jours, on obtient tous les nombres **réels** en considérant les suites de nombres rationnels qui peuvent converger vers une valeur qui n'est pas rationnelle.

Exemple:

3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, 3.1415926, 3.14159265, …

Est une suite infinie de nombre rationnels qui s'approche de π, lui-même un irrationnel.

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

Mais quelle est la solution à l’équation

$$X^2 = -1$$

?

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES

On l'invente encore !

On appelle cela i.

En fait, pour faire bonne mesure, on considère toutes les solutions d'équations de la forme

$$A + BX + CX^2 + DX^3 + \cdots + EX^n = 0$$

Avec $A, B, C, D, \dots, E$ réels. Ces équations sont appelées « équation polynômiales », et l'ensemble de leurs solutions est appelé « nombres complexes »

Tous les nombres réels sont des nombres complexes, mais les nombres complexes comprennent aussi des affaires bizarres comme i, un nombre qui, multiplié par lui-même, donne -1 !

EXERCICES 3

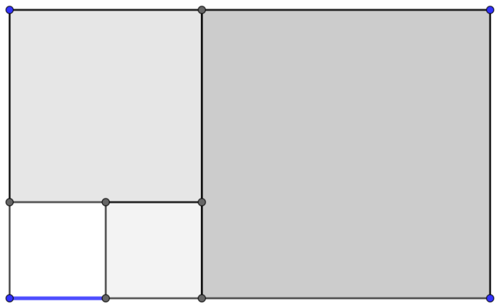
Désolé, je n'ai pas beaucoup d'exercices pour vous cette semaine…

1) L'ALGORITHME D'EUCLIDE POUR PLUSIEURS NOMBRES.

On a vu l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD de deux nombres A et B.

(a) Pouvez-vous trouver l'algorithme d'Euclide pour trois nombres A, B et C ?

(b) Pouvez-vous trouver l'algorithme d'Euclide pour autant de nombre qu'on veut ?



Indice : Vous pouvez imaginer une procédure analogue à celle du rectangle, mais en trois dimensions ? En N dimensions ?

2) L'HÔTEL INFERNAL

Indice: vous pouvez changer les gens de chambre, pourvu que vous ne les expulsiez pas !

Vous êtes réceptionniste dans un hôtel avec une infinité de chambres, numérotées à partir de 1.

Toutes les chambres sont occupées.

(a) Un.e client.e arrive et vous demande une chambre; vous lui répondez « Certainement ! Ce ne sera pas long ! »

Comment ferez-vous pour accommoder le/la client.e ? (Pas le droit de mettre un autre client à la porte !)

Indice : considérez les nombres pairs

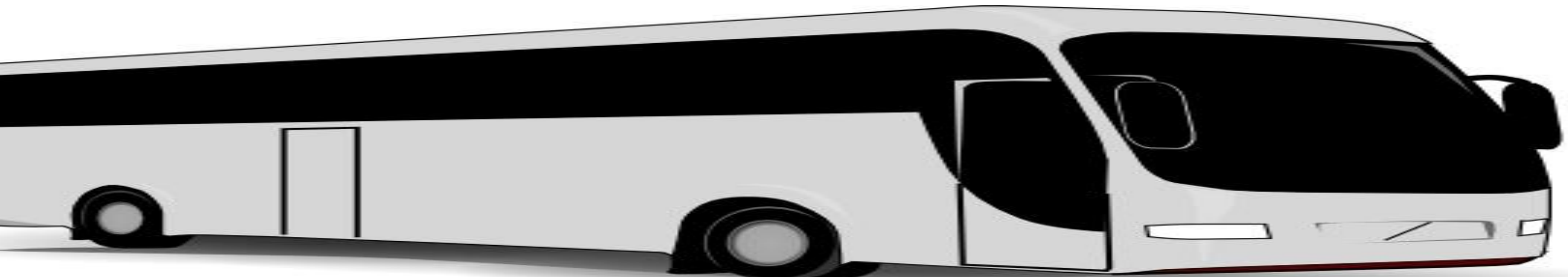
2) L'HÔTEL INFERNAL

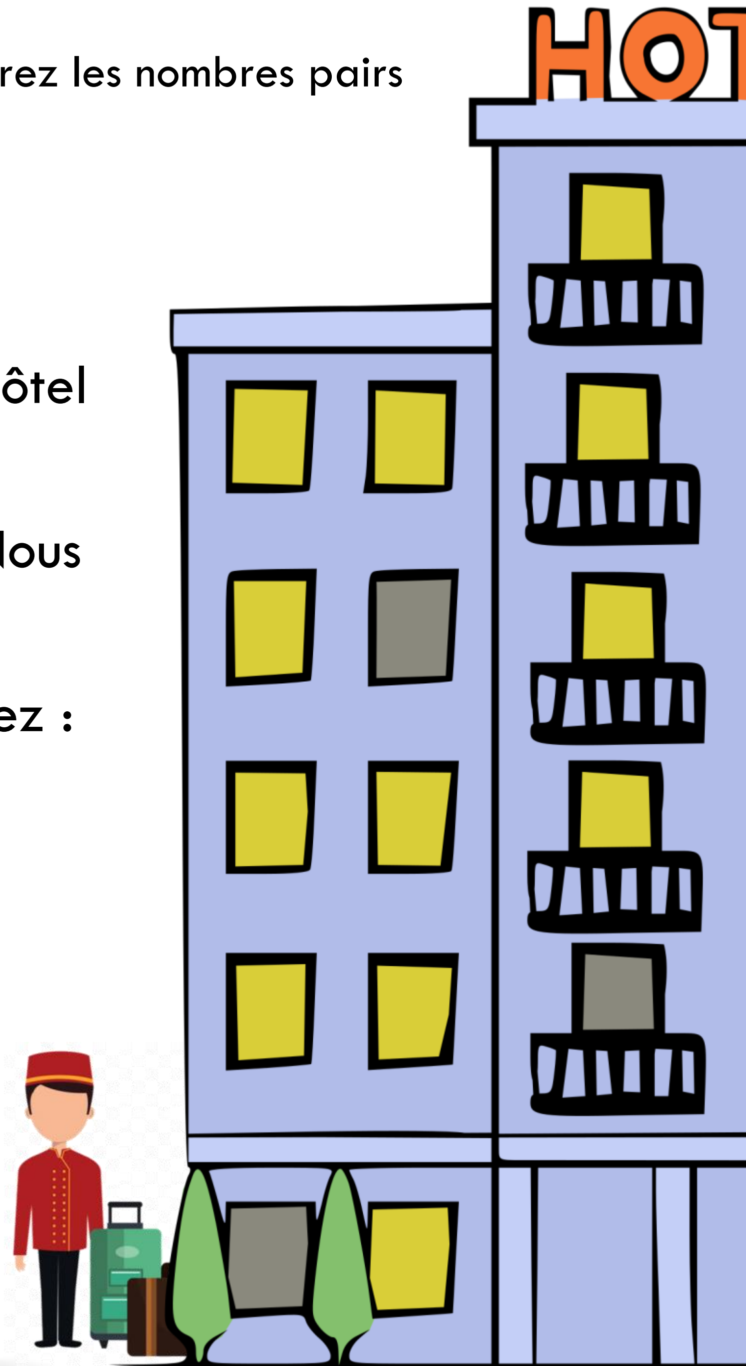
(b) Un autobus aux proportions inimaginables arrive devant votre hôtel – il contient une infinité de touristes.

L'organisateur du groupe de touristes vient vous voir, et vous dit « Nous aurions besoin d'une infinité de chambres ! »

Toutes vos chambres sont encore occupées. Néanmoins vous répondez : « Bien sûr, donnez-moi un instant ! »

Comment accommoderez-vous l'infinité de nouveaux/elles client.e.s sans débouter les ancien.ne.s **?**





2) L'HÔTEL INFERNAL

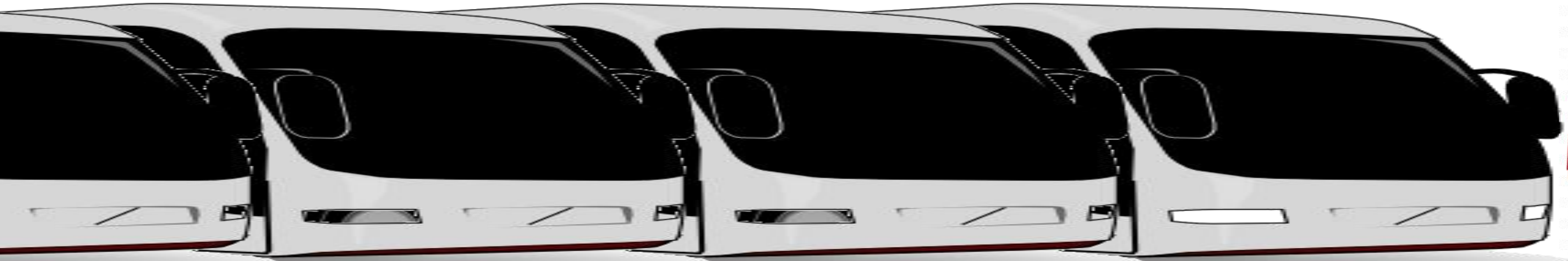
Indice : considérez l'infinité des nombres premiers, et les puissances de nombres premiers $(p, p^2, p^3, \dots, p^n, \dots)$

(c) Une infinité d'autobus contenant chacun une infinité de touristes se présentent à votre hôtel, toujours plein.

Cette fois, ça y est. Vous vous dites : « Je ne réussirai jamais à faire entrer tout ce monde-là dans mon hôtel ! »

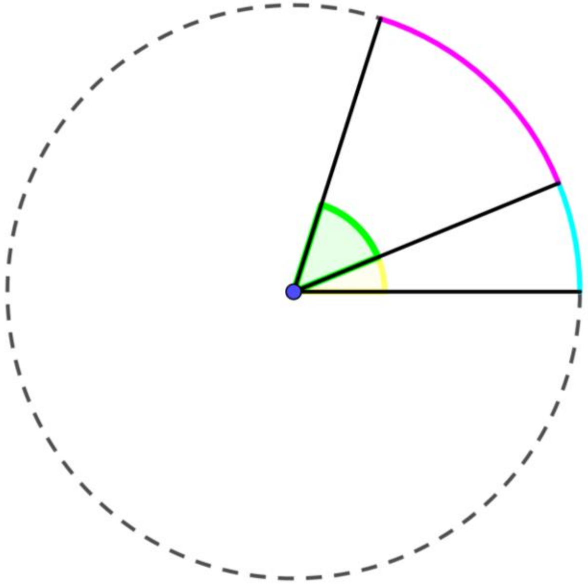
Vous vous apprêtez à aller le dire au responsable de la flottille d'autobus quand le patron de l'hôtel lui annonce fièrement : « Ah ! Nous sommes un peu serrés, mais on trouvera bien un moyen de s'arranger. »

Comment allez-vous faire ?



3) CALCULER LA CIRCONFÉRENCE DE LA TERRE

Proposition VI.33 Dans des cercles égaux, les angles sont au même rapport que les arcs qui les sous-tendent.

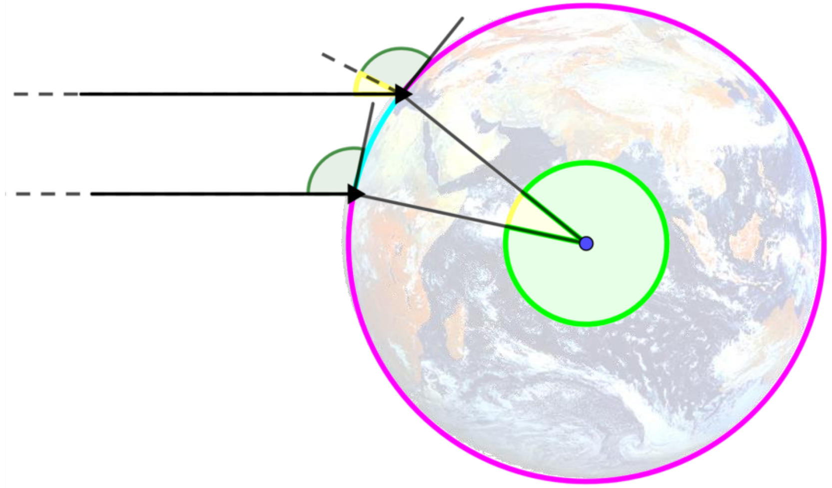


3) CALCULER LA CIRCONFÉRENCE DE LA TERRE

L'objectif : calculer la circonférence de la Terre.

Indice : on considère qu'il est possible de mesurer l'angle du Soleil à l'horizon, ainsi que de mesurer de grandes distances terrestres.

Autre indice : cette figure.



LA PROCHAINE FOIS …

Le mardi 6 novembre 2018 à la Station Ho.st à 19h.

Algèbre et nombres réels.

Nous continuerons notre exploration de résultats de proportionnalité plus complexes.

Grandeurs incommensurables; irrationnels.
Relation entre le rayon, l'aire d'un cercle, le volume d'une sphère…

Manquez pas ça !